PRIMER PARCIAL(9/1/2013) PARTE 1

1. La forma canónica de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 7 & -5\end{pmatrix}$ es:

SOLUCIÓN:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 7 & -5\end{pmatrix}\underset{E_{12}}{\sim}(1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 7 & -5\end{pmatrix}\underset{E_{32}}{\sim}(-1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 6 & -4\end{pmatrix}\underset{E_{2}}{\sim}(-1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 6 & -4\end{pmatrix}\underset{E_{3}}{\sim}(1/6)\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2/3\end{pmatrix}$$

$$\underset{E_{13}}{\sim}(3)\underset{E_{23}}{\sim}(1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=Can(A)$$

2. Verificar que el conjunto S={(x,y,z):z ≥ 7} **no** es un s.e.v. de [R^3

SOLUCIÓN: No lo es ya que $\vec{\mathbf{0}}\notin S$

3. Dada la matriz M=$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ la dimensión del subespacio col(M) vale:

SOLUCIÓN:

$$\dim(\mathrm{col}(M))=\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}=1$$

4. Dado el subespacio $S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$determinar otro subespacio T, de manera que $S\oplus T=\mathbb{R}^3$

SOLUCIÓN: El subespacio dado es un plano, por lo tanto , buscamos cualquier recta no incluida en el mismo, por ejemplo la normal al plano. La ecuación implícita del plano la obtenemos con

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow z-x-y=0$$

Por lo que el vector director de la normal es $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, y\ dicha$ recta tiene de ecuación paramétrica $\begin{cases}x=-\alpha\\ y=-\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$

5. En el espacio vectorial $\wp_2[x]$, de polinomios de grado menor o igual que dos , las coordenadas de $P(x)=x^2+1$con respecto a la base canónica $B(\wp_2[x])=\{x^2,x,1\}, son$

SOLUCIÓN: $P(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

6. Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$ $B(\mathbb{R}^2)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B^*(\mathbb{R}^2)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$Calcular las ecuaciones del cambio de base de $B(\mathbb{R}^2)$ a $B^*(\mathbb{R}^2)$

SOLUCIÓN:

$$\mathrm{C}(B,B^*)\approx\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{E_2(1)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 3\end{array}\right]\underset{E_{12}(-2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 1 & -4\\ 0 & -1 & -1 & 3\end{array}\right]$$

NOTA…………

Entonces $C(B,B^*) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y las ecuaciones pedidas son $\overrightarrow{y_{B^*}} = C(B,B^*)\overrightarrow{x_B}$

7. Obtener el subespacio intersección de los subespacios $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ y $T \equiv x + y + z = 0$.

Cómo vemos S es un subespacio de dimensión dos y los vectores dados (l.i.) verifican las ecuaciones de T. Por lo tanto $S \cap T = S$

8. El complemento ortogonal del subespacio $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$ es (ver ej. 1)

SOLUCIÓN:

La matriz de dicho ejercicio contiene a los generadodes dados como filas. Por tanto la base usual del subespacio es $B^U(S) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$Entonces cualquier vector del c. o. $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$será ortogonal a los de la base dada. Por lo cual las ecuaciones del c.o. son $\left[\begin{array}{c} x + 2t = 0 \\ y + 1/3\, t = 0 \\ z - t = 0 \end{array}\right.$

9. Convertir en ortogonal la base siguiente del subespacio $W, B(W) = \left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

SOLUCIÓN: Aplicando G-S s obtiene: $\vec{o}_1 = \vec{w}_1, \vec{o}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{o}_1 \rangle}{\|\vec{o}_1\|^2}\vec{o}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$

$$B^{ORTG}(W) = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}\right\}$$

10. Calcular la proyección del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio $T \equiv 2x + y - z = 0$.

SOLUCIÓN: Una base del subespacio dado es por ejemplo $B(T) = \left\{\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Una base ortogonal del mismo sería

$$B^{ORTG}(T) = \left\{\vec{o}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{o}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}\right\}$$

Calculamos entonces los productos escalares y normas que intervienen en la fórmula de la proyección:

$\langle \vec{v}, \vec{o}_1 \rangle = -1, \langle \vec{v}, \vec{o}_2 \rangle = \frac{-8}{5}, \|\vec{o}_1\|^2 = 5, \|\vec{o}_2\|^2 = 2$

El vector proyección será, $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\vec{o}_1 - \frac{4}{5}\vec{o}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{8}{25} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} + \frac{4}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{14}{25} \end{pmatrix}$

:

NOMBRE:

NOTA…………

Problema1: *(2 ptos total.)*

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$se consideran los subespacios siguientes:

$$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ y } T = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Con estos datos, se pide:

a) *(0.5 ptos.)*Calcular una base de cada uno y especificar sus dimensiones respectivas.

b) *(0.2 ptos.)*Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio $S \cap T$.

c) *(0.7 ptos.)*Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio $S + T$.

d) *(0.6 ptos.)*Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$.

SOLUCIÓN:

a) B(S)=$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, dim(S)=3 B(T)=$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$, dim(T)=2.

b) Como rg$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\2&0&0&2\end{pmatrix} = 4 \Rightarrow S \cap T \neq \{\underline{0}\}, \dim(S \cap T) = 1$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\2&0&0&2\end{pmatrix} \underset{E_{34}(-1),E_{54}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&-2&0\end{pmatrix} \underset{i.f.}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

B($S \cap T$)=$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y sus e. i. son $\begin{cases}x = z\\x = t\\y = 0\end{cases}$

c) Usando la fórmula de las dimensiones es: dim(S+T)=2+3-1=4, además

B(S+T)=$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} = B(\mathbb{R}^2)$

De acuerdo con la base anterior planteamos las ecs. Param. Del s.e. S+T como:$\begin{cases}x = \alpha\\y = \beta\\z = \gamma\\t = \delta\end{cases}$.

NOTA…………

d) $B(S^{\perp}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, puesto que al obligar a que un vector genérico de $S^{\perp}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sea ortogonal a los de la base de S , B(S)= $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, dicho vector se ve obligado a cumplir que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -t = 0, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x + y + z + t = 0$$

las ecuaciones implícitas de dicho subespacio son, por lo tanto : $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$, y la base es la expresada antes.

Problema2: *(2 ptos total.)*

Dados el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, S =$\mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, y el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$,se pide: (a) *(0,8 puntos)* Hallar una base ortogonal de S. (b*) (0,7 puntos)* Hallar el vector $Ps(\overrightarrow{u})$ proyecciòn ortogonal de $\vec{u}$ sobre el subespacio S. (c) *(1 punto)* Calcular la distancia y el ángulo entre el vector $\vec{u}$ y el subespacio S.

ÁLGEBRA LINEAL (1S1M-E) CURSO 2012/2013

:

NOMBRE:

NOTA…………